



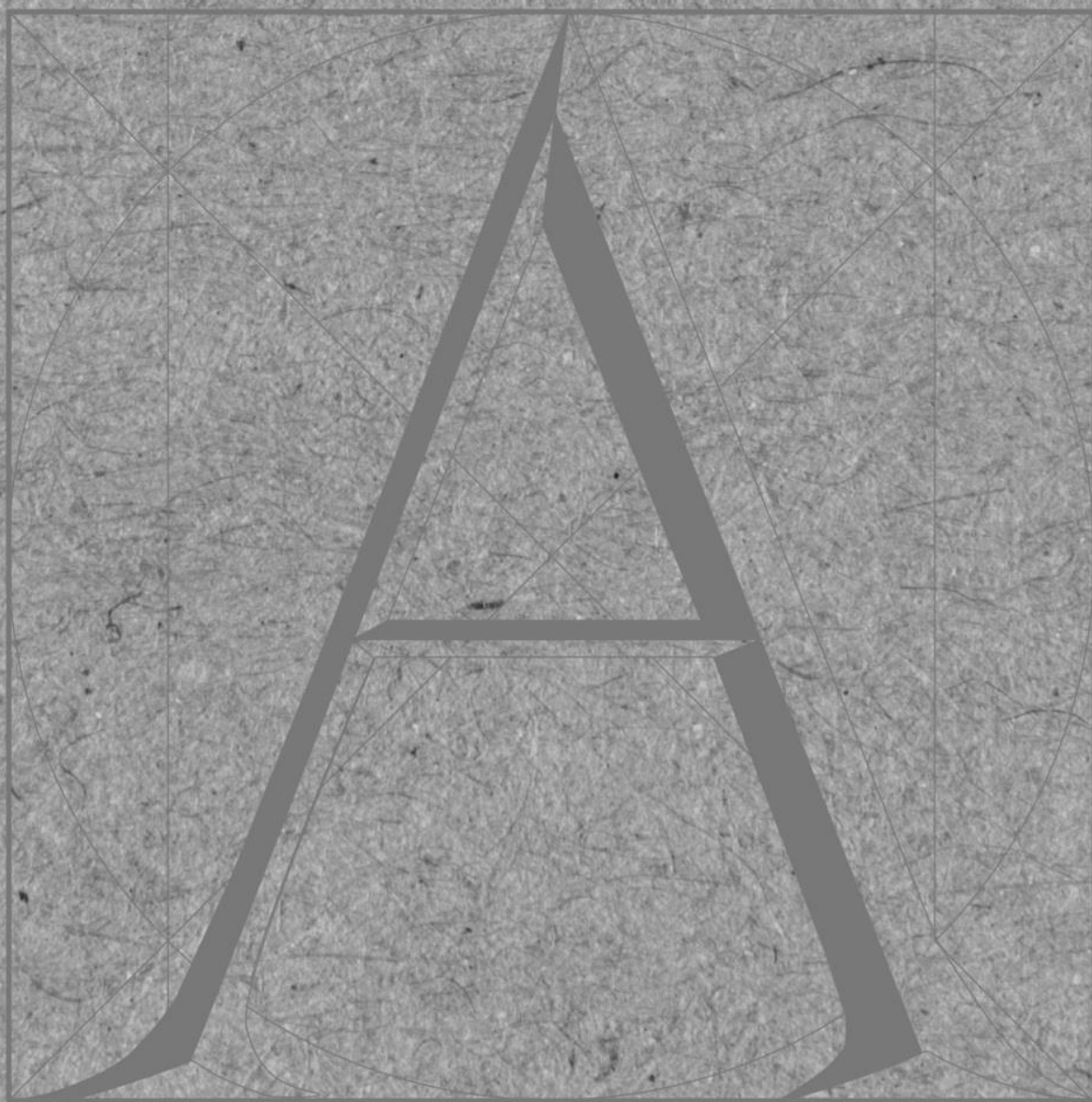
МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АКАДЕМИЧЕСКИЙ
ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ИМ. В.И. СУРИКОВА

О. И. ШИПКОВ

2020 год

МЕТОДЫ РАСЧЁТА СТАТИЧЕСКИ И КИНЕМАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ



Министерство культуры Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
**Московский государственный академический
художественный институт имени В.И. Сурикова
при Российской академии художеств**

Факультет архитектуры
Кафедра архитектуры

**МЕТОДЫ РАСЧЁТА СТАТИЧЕСКИ И
КИНЕМАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Примеры расчёта и контрольные задания

Методическое пособие

Москва 2020

Подготовлено и рекомендовано к печати
кафедрой архитектуры
Московского государственного академического
художественного института имени В. И. Сурикова
при Российской академии художеств
(протокол № 5 от 20 января 2020 г.)

Автор:
проф., к.т.н. **Шипков О.И.**

Рецензенты:
проф. кафедры архитектуры РАЖВиЗ Ильи Глазунова, к. т. н. **Кочетков О. И.**;
ст. научный сотрудник АО «Научно-исследовательский центр «Строительство»
Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций
им. В.А Кучеренко, к.т.н. **Стойнов В. О.**

Методическое пособие предназначено для студентов факультета архитектуры, обучающихся по программе бакалавриата направления подготовки 07.03.01. «Архитектура». Рекомендуются для выполнения расчётно-графических работ по дисциплине «Строительная механика».

УДК 624.04 (075)
ББК 38.112

© Московский государственный академический
художественный институт имени В.И. Сурикова
при Российской академии художеств, 2017
© Шипков О.И., 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. МЕТОД СИЛ ДЛЯ РАСЧЕТА РАМЫ	5
1.1. Кинематический анализ	5
1.2. Построение основной системы	6
1.3. Составление системы канонических уравнений	6
1.4. Построение единичных и грузовой эпюр моментов.....	7
1.5. Определение коэффициентов и грузовых членов уравнений.....	7
1.6. Решение системы канонических уравнений.....	9
1.7. Построение эпюры моментов	10
1.8. Построение эпюр поперечных и продольных сил	10
1.9. Статическая, деформационная и кинематическая проверки	11
1.10. Пример расчета рамы методом сил	11
2. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	20
2.1. Кинематический анализ	21
2.2. Построение основной системы	21
2.3. Составление системы канонических уравнений	22
2.4. Построение единичных и грузовой эпюр моментов.....	22
2.5. Определение коэффициентов и грузовых членов уравнений.....	23
2.6. Решение системы канонических уравнений.....	23
2.7. Построение эпюры моментов	24
2.8. Построение эпюр поперечных и продольных сил	24
2.9. Статическая и деформационная проверки	25
2.10. Пример расчета рамы методом перемещений.....	25
3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ	29
4. ЛИТЕРАТУРА	31

ВВЕДЕНИЕ

Данные указания предназначены для выполнения двух расчётно-графических работ студентами во втором семестре изучения предмета (в 4м семестре учёбы). Согласно программе, этому должны предшествовать работы первого семестра по расчёту статически определимых систем (расчёт ферм и построение эпюр усилий в статически определимых системах).

Автоматизированные расчёты сложных систем, как правило, производятся методом конечных элементов, в основе алгоритма которого методы сил и перемещений, поэтому здесь рассмотрены матричные алгоритмы, но в качестве примера и в комплекте заданий приняты простые схемы. Это позволяет провести расчёт в аналитическом виде, а также сопоставить методику и результаты, принимая совпадающие исходные схемы для обоих методов.

При расчёте гибких рам учитываются только изгибные перемещения.

Ориентировочное время, требуемое для самостоятельного выполнения первой работы студентом, составляет 10 – 12 часов, второй 6 – 8 часов.

1. МЕТОД СИЛ ДЛЯ РАСЧЕТА РАМЫ

1.1. Кинематический анализ

Стержневая система называется статически неопределимой, если условий равновесия для определения реакций в связях и усилий в элементах системы не достаточно.

Степень статической неопределимости стержневой системы равна разности между числом неизвестных реакций и числом уравнений равновесия или разности между числом одиночных связей и числом степеней свободы системы (одиночной здесь названа связь, устраняющая только одну степень свободы). Другие связи могут быть составлены из одиночных.

Для плоской системы необходимое число связей равно трем, что соответствует числу уравнений статики. Связи, наложенные сверх необходимого числа, являются дополнительными, или «лишними». Различают внешне и внутренне статически неопределимые системы, в зависимости от того, являются ли дополнительные связи опорными или междуэлементными.

Для систем, имеющих только опорные «лишние» связи, степень статической неопределимости можно вычислить по формуле

$$Л = C_0 + 2Ш - 3Д, \quad (1.1)$$

где $Л$ – число «лишних» связей, C_0 – число опорных стержней, $Ш$ – число простых (врезных) шарниров, $Д$ – число дисков или кинематически неизменяемых (не разделённых шарнирами) частей. Для определения числа дисков можно пользоваться формулой

$$Д = Ш + 1.$$

При наличии как внутренних, так и внешних избыточных связей используем универсальную формулу:

$$Л = 3К - Ш, \quad (1.2)$$

здесь $К$ – количество замкнутых контуров, включая опорные, $Ш$ – количество одинарных шарниров, включая опорные.

1.2. Построение основной системы

Основной системой (ОС) называется эквивалентная заданной (ЗС) статически определимая система, полученная из заданной путём замены «лишних» связей силами. Величины этих сил определяются из условий равенства нулю перемещений в направлении отброшенных внешних связей и взаимных перемещений по направлению отброшенных связей между элементами. Выбор «лишних» связей влияет только на ход решения, но не на результат.

1.3. Составление системы канонических уравнений

Далее для основной системы необходимо сформировать канонические уравнения метода сил:

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \dots + \delta_{1j}x_j + \dots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1q} &= 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \dots + \delta_{2j}x_j + \dots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2q} &= 0, \\ \delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + \dots + \delta_{ij}x_j + \dots + \delta_{in}x_n + \Delta_{iq} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\dots\dots\dots, \\ \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \dots + \delta_{nj}x_j + \dots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{nq} = 0.$$

Здесь i -е уравнение выражает равенство нулю суммарного перемещения в направлении i -й отброшенной связи ($i = 1, 2, 3, \dots, n$); $\delta_{ij} x_j$ – перемещение от силы x_j , заменяющей действие j – й отброшенной связи ($j = 1, 2, 3, \dots, n$); Δ_{iq} – перемещение (в основной системе) от заданной нагрузки. Коэффициенты δ_{ij} при искомым величинах сил x_j это перемещения от единичных значений сил x_j .

Величины δ_{ij} и Δ_{iq} определяются по упрощенной (одночленной) формуле Максвелла-Мора, не учитывающей перемещений от растяжения (сжатия) и сдвига:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^m \int_0^{s_k} \frac{M_i M_j}{EI_k} dx. \quad (1.4)$$

$$\Delta_{iq} = \sum_{k=1}^m \int_0^{s_k} \frac{M_i M_q}{EI_k} dx. \quad (1.5)$$

Здесь k – номер элемента (стержня) системы ($k = 1, 2, 3, \dots, m$); s_k – длина k – го стержня; M_i, M_j, M_p – моменты в основной системе от единичных сил и от заданной нагрузки; EI_k – изгибная жёсткость сечения k – го стержня.

Из теоремы Максвелла о взаимности перемещений (частный случай теоремы Бетти о взаимности работ) следует, что

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \quad (1.6)$$

1.4. Построение единичных и грузовой эпюр моментов

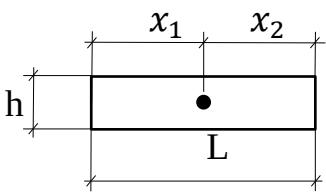
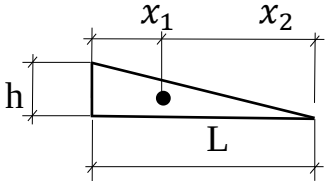
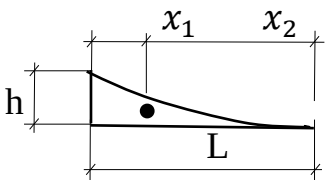
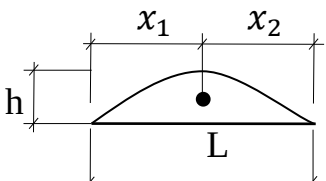
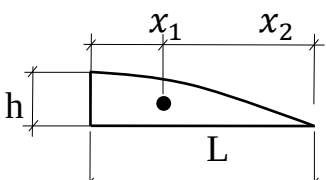
В сформированной ОС известными методами механики статически определимых систем (см. пример) должны быть построены эпюры моментов от единичных сил (M_j) и от заданной нагрузки (M_q).

1.5. Определение коэффициентов и грузовых членов уравнений

Интегралы от произведения эпюр вычисляются способом Верещагина. Этот способ применим при условии, что из двух перемножаемых эпюр хотя бы одна прямолинейна или состоит из прямолинейных участков. Согласно правилу, ин-

теграл вычисляется как произведение площади в общем случае криволинейной эпюры на ординату прямолинейной, взятую под центром тяжести первой. Для определения площадей и положения центров тяжести простых фигур можно использовать таб. 1.1:

Таблица 1.1

№	Вид эпюры изгибающих моментов	Площадь эпюры ω	Абсциссы центра тяжести эпюры	
			x_1	x_2
1		Lh	$L/2$	$L/2$
2		$Lh/2$	$L/3$	$2L/3$
3		$Lh/3$	$L/4$	$3L/4$
4		$2Lh/3$	$L/2$	$L/2$
5		$2Lh/3$	$3L/8$	$5L/8$

Более сложные эпюры можно составить из простых, что равносильно представлению воздействия сложной нагрузки как суммы воздействий простых, по принципу суперпозиции. Так, если эпюра моментов описывается полиномом второй

степени, можно её разделить на постоянную (прямоугольную), линейную (треугольную) и параболическую (рис. 1.1).



Рис. 1.1

Перед решением канонических уравнений необходимо выполнить универсальные проверки:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \sum_{k=1}^m \int_0^{s_k} \frac{M_s M_s}{EI_k} dx; \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta_{iq} = \sum_{k=1}^m \int_0^{s_k} \frac{M_s M_q}{EI_k} dx \quad (1.8)$$

где M_s - суммарная эпюра, получается путем сложения ординат единичных эпюр.

Если проверка по формуле (1.7) не удовлетворяется, то поиску ошибок могут помочь построчные проверки:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \delta_{is} = \sum_{k=1}^m \int_0^{s_k} \frac{M_i M_s}{EI_k} dx; \quad (1.9)$$

1.6. Решение системы канонических уравнений

При большом количестве уравнений систему (1.3) следует решать на компьютере, в матричном виде:

$$\delta X + \Delta_p = 0. \quad (1.10)$$

Здесь обозначено:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}; \quad \Delta_p = \begin{bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{bmatrix}; \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

где δ – матрица податливости (матрица коэффициентов δ_{ij} при неизвестных X_j), X – вектор (матрица-столбец) неизвестных, Δ_p – вектор нагрузки, 0 – нуль-вектор.

Из матричного уравнения (1.6) определяется вектор неизвестных:

$$X = -\delta^{-1}\Delta_p, \quad (1.11)$$

где δ^{-1} – обратная матрица податливости.

В нашем случае, для определения неизвестных можно использовать правило Крамера:

$$X_j = |\delta_j|/|\delta|, \quad (1.12)$$

где $|\delta|$ – определитель матрицы δ , $|\delta_j|$ – определитель матрицы, полученной из δ заменой j – го столбца столбцом грузовых членов Δ_{ip} .

1.7. Построение эпюры моментов

Используя эпюры моментов от единичных сил (M_j) и от заданной нагрузки (M_p), можем по принципу суперпозиции с учетом линейности системы, представить в виде суммы

$$\sum_{j=1}^n M_j X_j + M_p \quad (1.13)$$

Знаки моментов M_j и M_p здесь можно определять по предварительно принятому правилу, например, плюс – слева по ходу движения (см. пример). Пронумеровав характерные сечения для всех элементов рамы, подсчёт ординат эпюры удобно производить в табличной форме.

1.8. Построение эпюр поперечных и продольных сил

Эпюра Q строится по эпюре M по дифференциальной зависимости

$$Q(x) = dM(x)/dx \quad (1.14)$$

или в конечных разностях, а эпюра N строится по эпюре Q способом вырезания узлов. Здесь x – абсцисса локальной (отдельной для каждого элемента) системы координат.

1.9. Статическая, деформационная и кинематическая проверки

Необходимым условием правильности решения задачи является равенство нулю суммы проекций на оси общей декартовой системы координат всех активных и реактивных внешних сил. Реакции опор определяются непосредственно на эпюрах поперечной и продольной сил. Можно также проверять равновесие любой отсечённой части с учётом усилий в рассекаемых стержнях. Кроме этого, необходимо проверять равенство нулю суммы моментов в узлах, направляя момент от эпюры к оси стержня.

Кинематическая (деформационная) проверка заключается в равенстве нулю перемещений по направлению «лишних» связей и ее рекомендуется выполнять путем вычисления суммы интегралов от произведения эпюры изгибающих моментов на суммарную эпюру от единичных сил:

$$\Delta_s = \sum_{k=1}^m \int_0^{s_k} \frac{MM_s}{EI_k} dx. \quad (1.15)$$

Предварительная деформационная проверка эпюры моментов не требует вычислений. Для этого нужно построить характер линии прогиба рамы, соответствующей связям и эпюре, зная, что выпуклость линии (растянутое волокно) со стороны момента, а кривизна пропорциональна моменту и что углы между касательными к элементам в рамных узлах неизменны.

1.10. Пример расчета рамы методом сил

Расчетная схема рамы показана на рис.1.2:

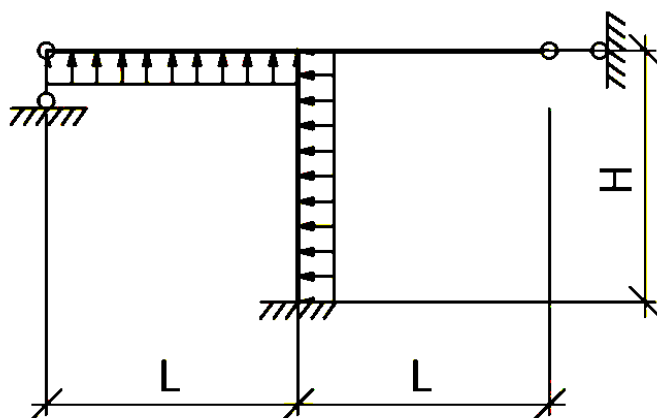


Рис. 1.2

Примем распределённую нагрузку на стойке и ригеле $q = 4 \text{ кН/м}$; Модуль упругости «Е» ($\text{кН} \cdot \text{м}^2$), моменты инерции ригеля I_p (м^4) и стойки I_c численно не задаём, поскольку на эпюры усилий влияет только соотношение изгибных жёсткостей элементов рамы. Примем $I_p/I_c = 2$, $I_c = I$, длины элементов L и H примем равными 6 м. В решении должны фигурировать все исходные данные в буквенном виде, числовые значения используем только в конечных результатах.

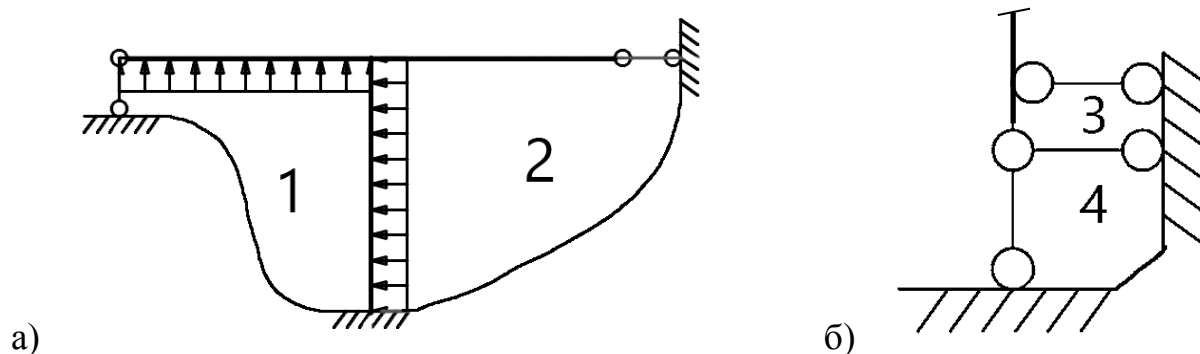


Рис 1.3

Согласно рис. 3,а количество контуров $K = 2$, одиночных шарниров $\Pi = 4$. По формуле 1.2

$$L = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

Или, учитывая, что заделка эквивалентна трём линейным связям (рис. 1.3,б), получим $K = 4$, $\Pi = 10$, откуда $L = 3 \cdot 4 - 10 = 2$.

Основную систему в данном случае удобно принять, отбросив одиночные линейные связи, в этом случае получим консольную схему, в которой для построения эпюр не требуется определять реакции. Но рассмотрим более общий вариант, где консоль заменена линейной связью и реакциями X_1, X_2 .

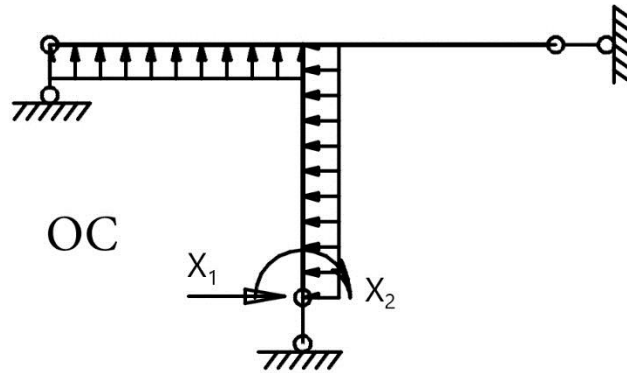


Рис 1.4

Реакции для построения единичных эпюр находим из условий равновесия.

Для схемы на рис. 5: $\sum M_A = 0 \rightarrow X_1 \cdot H - R_D \cdot L = 0 \rightarrow R_D = H / L$ (здесь принято $X_1 = 1$); $\sum M_B = 0 \rightarrow X_1 \cdot H - R_A \cdot L = 0 \rightarrow R_A = H / L$.

Проверка: $\sum M_C = X_1 \cdot H + R_D \cdot L - R_A \cdot 2L = H + (H / L) \cdot L - (H / L) \cdot 2L = 0$.

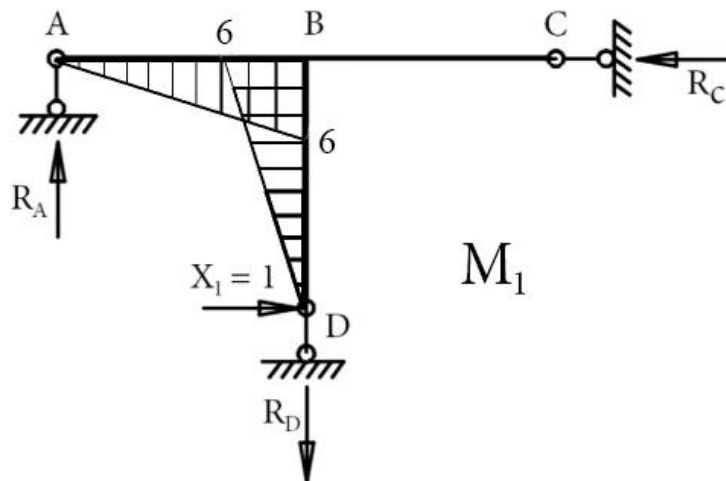


Рис 1.5

Для схемы на рис. 6: $\sum M_A = 0 \rightarrow R_D \cdot L - X_2 = 0 \rightarrow R_D = 1 / L$; $\sum M_B = 0 \rightarrow R_A \cdot L - X_2 = 0 \rightarrow R_A = 1 / L$.

Проверка: $\sum M_C = R_A \cdot 2L - R_D \cdot L - X_2 = 2L / L - L / L - 1 = 0$.

Здесь, как и в других схемах, проверка реакций также может проводиться по сумме проекций всех сил на оси.

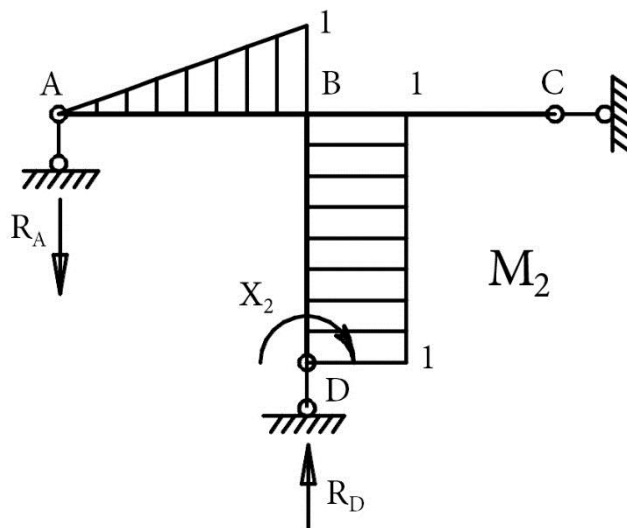


Рис 1.6

Реакции для заданной нагрузки (рис. 7) определяем из условий: $\sum M_A = 0 \rightarrow$

$$-R_D \cdot L + qL^2 / 2 - qH^2 / 2 = 0 \rightarrow R_D = q(L^2 / 2 - H^2 / 2) / L;$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A \cdot L - qL^2 / 2 - qH^2 / 2 = 0 \rightarrow R_A = q(L^2 / 2 + H^2 / 2) / L .$$

Проверка: $\sum M_C = R_A \cdot 2L + R_D \cdot L - q(3L^2 / 2 + H^2 / 2) = q(L^2 + H^2) + q(L^2 / 2 - H^2 / 2) - q(3L^2 / 2 + H^2 / 2) = 0 .$

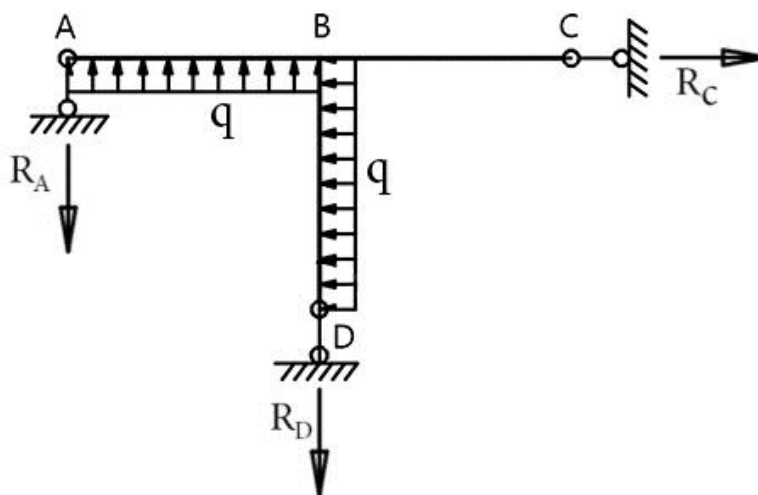


Рис 1.7

Момент на ригеле $M(x) = R_A \cdot x - q \cdot x^2 / 2$, $M(L) = q(L^2 / 2 + H^2 / 2) - q \cdot L^2 / 2 = qH^2 / 2$, где x – абсцисса, т. е. расстояние от начала стержня (т. «А»). Момент на стойке $|M(x)| = q \cdot x^2 / 2$, $|M(H)| = qH^2 / 2$, где x – расстояние от точки «D». Таким образом, равенство нулю суммарного момента в узле «В» обеспечено (рис. 8,б). Подставив исходные данные, получим $M_B = 72 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

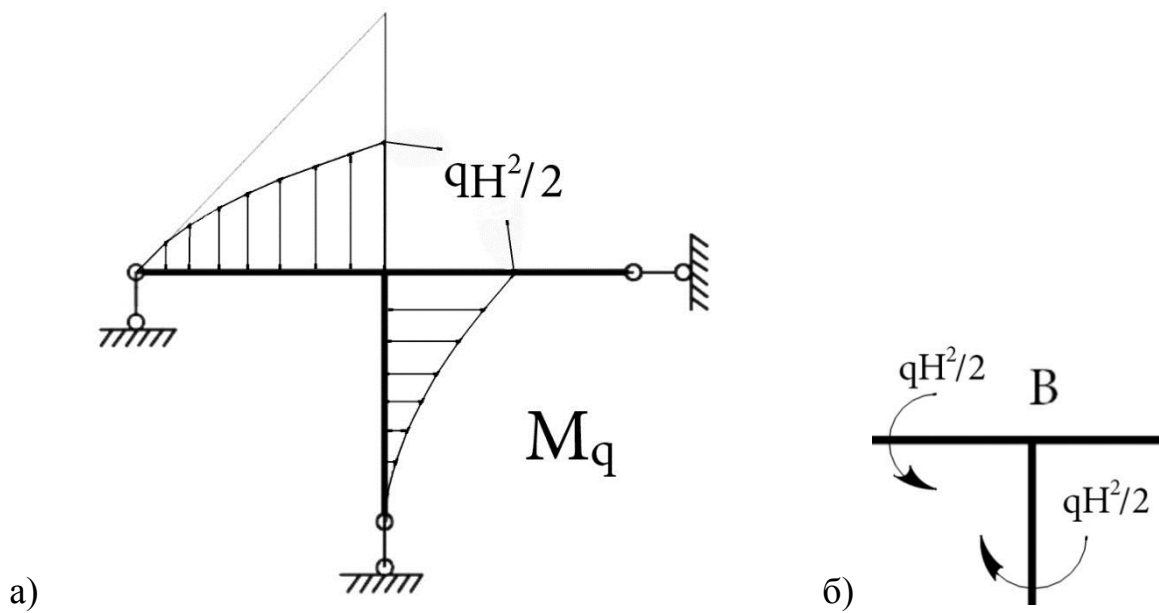


Рис 1.8

Далее по правилу Верещагина и таб. 1 определим коэффициенты:

$$\delta_{11} = 36L/3EI_p + 36H/3EI_c = 216/3/2EI + 216/3EI = 108/EI; \quad \delta_{22} = L/3EI_p + H/EI_c = 6/3/2EI + 6/EI = 7/EI; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -6L/3EI_p - 6H/2EI_c = -36/3/2EI - 36/2EI = -24/EI.$$

Грузовые члены получим перемножением единичных эпюр на грузовую. Эпюру M_q на ригеле представим как разность между линейной и параболической, тогда по правилу Верещагина будем иметь:

$$\Delta_{1q} = -6[q(L^2/2 + H^2/2)L/3 - q(L^2/2/3)L \cdot 3/4]/EI_p - 6[q(H^2/2/3)H \cdot 3/4]/EI_c = -6[q(L^2/2 + H^2/2)/3 - q \cdot L^2/2/4]L/2EI - qH^3/2/4/EI = 24 \times 216[-1/6 + 1/16 - 1/8]/EI = 24 \times 36(3 - 6 - 8)/48EI = -1188/EI$$

$$\Delta_{2q} = [q(L^2/2 + H^2/2)/3 - q \cdot L^2/2/4]L/2EI + qH^3/2/3/EI = q(L^3/16 + H^2L/12 + H^3/6)/EI = 4 \times 6 \times 36 \times 15/48EI = 234/EI.$$

Перед решением канонических уравнений необходимо по формулам 1.7 и 1.8 выполнить универсальные проверки:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{1}{EI_p} \int_0^L M_s M_s dx + \frac{1}{EI_c} \int_0^H M_s M_s dx;$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 \Delta_{iq} &= \Delta_{1q} + \Delta_{2q} = \\ &= \frac{1}{EI_p} \int_0^L M_s M_q dx + \frac{1}{EI_c} \int_0^H M_s M_q dx;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} &= (108 - 2 \cdot 24 + 7)/EI = 67/EI; \\ \frac{1}{EI_p} \int_0^L M_s M_s dx + \frac{1}{EI_c} \int_0^H M_s M_s dx &= \\ &= (1-6)(1-6) L/3 / 2 + (6H/2)(6 \cdot 2/3 - 1) - 1 \cdot H (3 - 1) = (25 + 54 - 12)/EI = 67/EI\end{aligned}$$

$$\Delta_{1q} + \Delta_{2q} = (-1188 + 234)/EI = -954/EI;$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{EI_p} \int_0^L M_s M_q dx + \frac{1}{EI_c} \int_0^H M_s M_q dx = \\ &= -q \{ [(L^2/2 + H^2/2)(L/2)5(2/3) - (L^2/2)(L/3)5(3/4)]/EI_p + [(H^2/2)(H/3)(L/3/4 - 1)]/EI_c \} = \\ &= -4 \{ [(36/2 + 36/2)(6/2)5(2/3) - (36/2)(6/3)5(3/4)]/2 + [(36/2)(6/3)(18/4 - 1)] \} / EI = -954/EI.\end{aligned}$$

Таким образом, проверки выполнены.

По правилу Крамера (ф. 1.12) определим неизвестные:

$$\begin{aligned}X_1 &= -(\Delta_{1q} \delta_{22} - \delta_{12} \Delta_{2q}) / (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21}) = -(-1188 \cdot 7 + 24 \cdot 234) / (108 \cdot 7 - 24 \cdot 24) = \\ &= 2700/180 = 15; \\ X_2 &= -(\delta_{11} \Delta_{2q} - \Delta_{1q} \delta_{21}) / (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21}) = -(108 \cdot 234 - 1188 \cdot 24) / (108 \cdot 7 - 24 \cdot 24) = \\ &= 3240/180 = 18.\end{aligned}$$

Проверка неизвестных производится подстановкой в уравнения 1.3:

$$\begin{aligned}\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1q} &= 108 \cdot 15 - 24 \cdot 18 - 1188 = 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2q} &= -24 \cdot 15 + 7 \cdot 18 + 234 = 0.\end{aligned}$$

Суммарный момент M определим по формуле 1.10, которая в данной задаче примет вид:

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_q. \quad (1.16)$$

Номера сечений, локальные координаты и знаки эпюр показаны на рис. 9. Положительные значения моментов условно приняты слева по ходу движения в сторону возрастания номеров сечений.

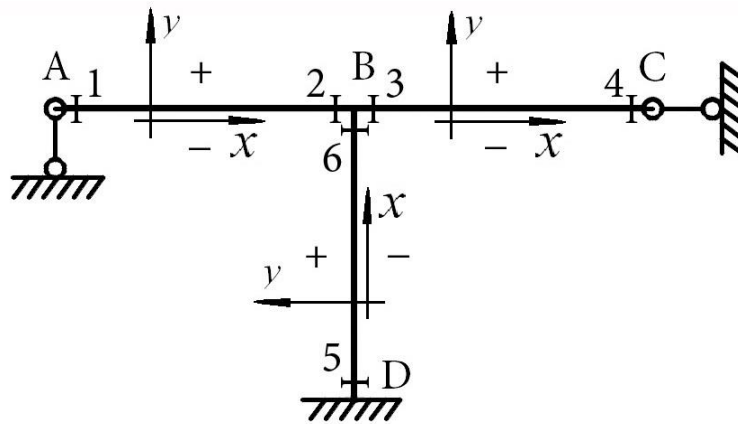


Рис 1.9

Подсчёт моментов в крайних сечениях сведён в табл. 1.2:

Таблица 1.2

№ сечения	$M_1 X_1$	$M_2 X_2$	M_q	M (кН•м)
1	0	0	0	0
2	- 90	18	72	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	-18	0	-18
6	90	-18	-72	0

Суммарные эпюры складываются из линейных, определяемых по таблице, и параболических, обусловленных распределённой нагрузкой.

На участке А-В ригеля

$$M(x) = qLx/2 - qx^2/2 = 12x - 2x^2;$$

на стойке D-B

$$M(x) = - 18 + 18x/H + qHx/2 - qx^2/2 = - 18 + 15x - 2x^2.$$

Отсюда по формуле 2.4 определим поперечные силы:

на участке А-В

$$Q(x) = 12 - 4x, Q_A = Q(0) = 12 \text{ (кН)}, Q_B = Q(L) = - 12 \text{ (кН)},$$

на стойке D-B

$$Q(x) = 15 - 4x, Q_D = Q(0) = 15 \text{ (кН)}, Q_B = Q(H) = - 9 \text{ (кН)};$$

На участке А-В

эпюра $M(x)$ имеет экстремум в середине:

$$M_{\max} = 12 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 36 - 2 \cdot 9 = 18 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

На участке D-B

эпюра $M(x)$ имеет экстремум, определяемый из условия равенства нулю производной, т. е. $Q(x) = 15 - 4x = 0$, откуда $x = 15/4$.

Подставив это значение x в выражение момента, получим:

$$M_{\max} = -18 + 15 \cdot 15/4 - 2 \cdot (15/4)^2 = -18 + 56,25 - 28,125 = 10,125.$$

Окончательные эпюры M и Q имеют вид:

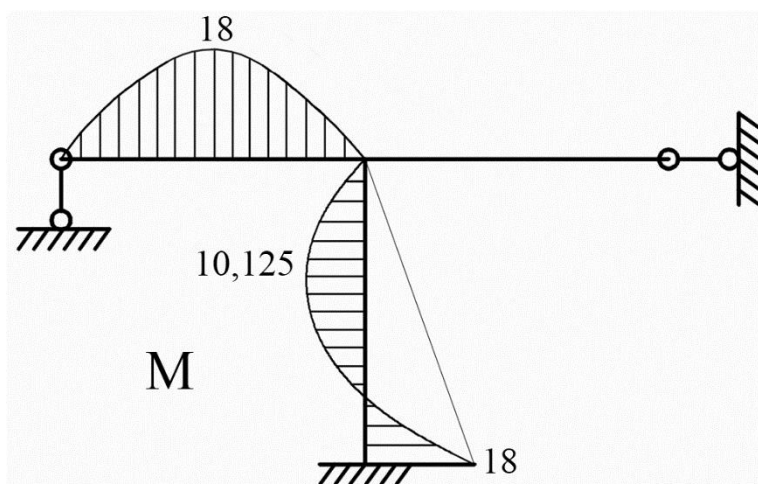


Рис 1.10

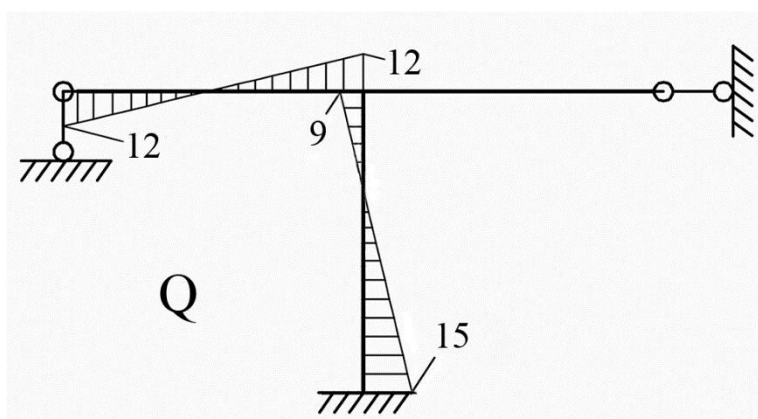


Рис 1.11

Из равновесия рамы в целом определим реакции (рис. 12) и продольные силы (рис. 13):

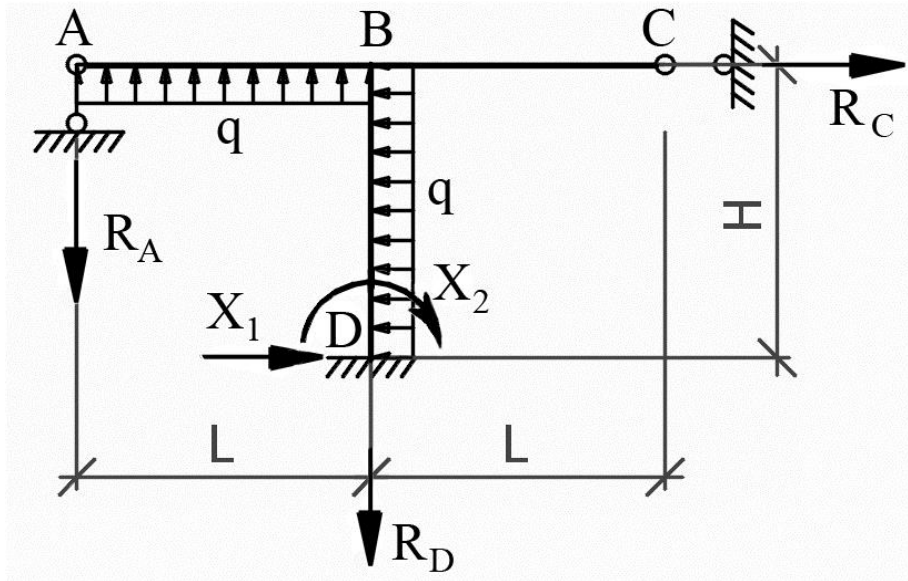


Рис 1.12

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A \cdot L + X_1 \cdot H - qL^2/2 - qH^2/2 - X_2 = 0 \rightarrow R_A = (qL^2/2 + qH^2/2 + X_2 - X_1 \cdot H)/L = (4 \cdot 36/2 + 4 \cdot 36/2 + 18 - 15 \cdot H)/6 = 12 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow R_A \cdot L - R_C \cdot H - X_2 = 0 \rightarrow R_C = (R_A \cdot L - X_2)/H = (12 \cdot 6 - 18)/6 = 9 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow X_1 \cdot H - R_D \cdot L - X_2 \rightarrow R_D = (X_1 \cdot H - X_2)/L = (15 \cdot 6 - 18)/6 = 12 \text{ (кН)};$$

Проверка: суммарная проекция на горизонтальную ось $\sum X = X_1 + R_C - q \cdot H = 15 + 9 - 4 \cdot 6 = 0$; суммарная проекция на вертикальную ось $\sum Y = qL - R_A - R_D = 4 \cdot 6 - 12 - 12 = 0$.

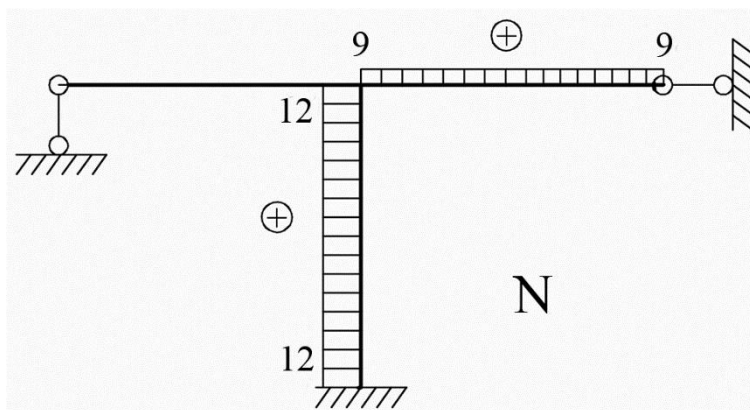


Рис 1.13

Равновесие узла (рис. 14) проверяем по алгебраическим суммам проекций на оси:

$$\sum X = N_{3-4} - Q_{5-6} = 9 - 9 = 0; \quad \sum Y = Q_{1-2} - N_{5-6} = 12 - 12 = 0.$$

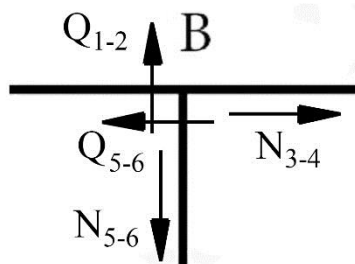


Рис 1.14

Из формулы 1.15 имеем:

$$\Delta s = \frac{1}{EI_p} \int_0^L MM_s dx + \frac{1}{EI_c} \int_0^H MM_s dx = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow [-(18 \cdot 6 \cdot 2/3) 5/2]/2 + (18 \cdot 6 \cdot 2/3)(6/2 - 1) - (18 \cdot 6/2)(6/3 - 1) = 18(-5 + 8 - 3) = 0.$$

Таким образом, необходимое кинематическое условие выполнено.

2. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

2.1. Кинематический анализ

Степень кинематической неопределимости стержневой системы равна числу виртуальных (возможных малых) перемещений узлов сопряжения элементов и определяется по формуле $n = n_y + n_{\text{л}}$,

где n_y – количество угловых перемещений жестких узлов, равное числу жестких внутренних узлов в системе, $n_{\text{л}}$ – количество возможных линейных перемещений внутренних узлов. Опорные узлы не рассматриваются.

При расчёте гибких рам учитываются только изгибные перемещения.

2.2. Построение основной системы

Основной системой (ОС) называется эквивалентная заданной (ЗС) кинематически определяемая система, полученная из заданной с помощью установки узловых связей, делящих систему на однопролетные балки.

На рис. 1.1,а показана четырежды статически неопределимая, но одинажды кинематически неопределимая рама. Поэтому её расчёт следует вести методом перемещений. ОС метода сил (рис.1.1,б) построена заменой «лишних» связей силами X_1, X_2, X_3, X_4 . На рис.1,в) показана ОС метода перемещений. Здесь доста-

точно поставить только связь на поворот. Чтобы полученная система была эквивалентна заданной, нужно повернуть наложенную связь на угол Z (рис. 1.1, в), на который узел повернётся в заданной системе. Величина Z является искомой и определяется из условия равенства нулю реакции наложенной связи.

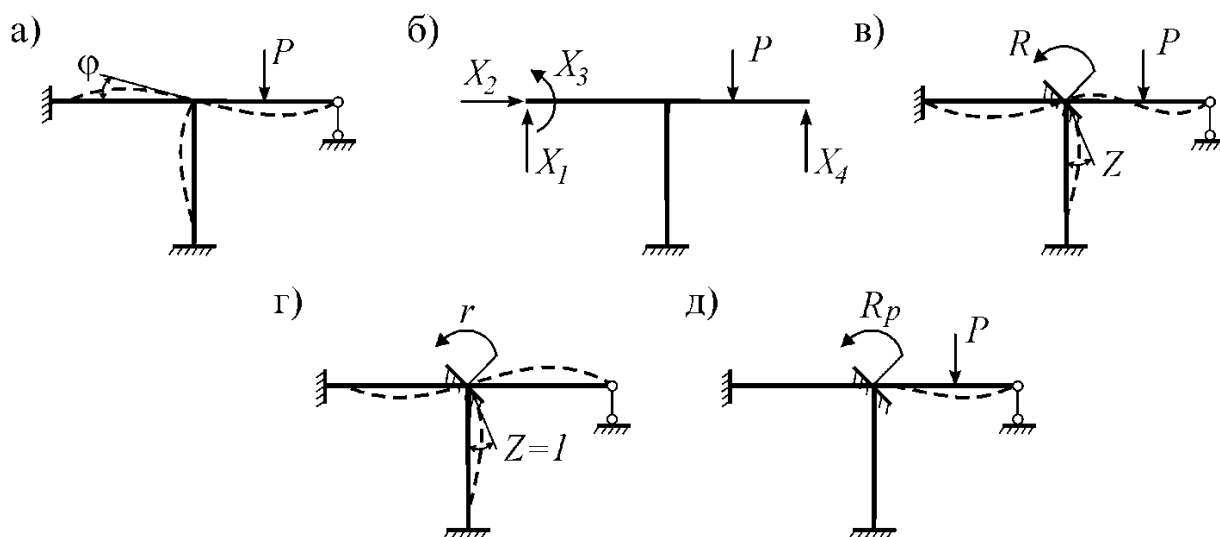


Рис.1.1

2.3. Составление системы канонических уравнений

Для «п» раз кинематически неопределимой рамы система канонических уравнений метода перемещений имеет вид:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + \dots + r_{1n} \cdot Z_n + R_{1P} = 0,$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + \dots + r_{2n} \cdot Z_n + R_{2P} = 0,$$

.....

$$r_{n1} \cdot Z_1 + r_{n2} \cdot Z_2 + \dots + r_{nn} \cdot Z_n + R_{nP} = 0.$$

Каждое уравнение системы выражает равенство нулю суммарной реакции соответствующей наложенной связи. Вместе они являются условиями эквивалентности исходной и основной системы. Здесь r_{ij} – коэффициент при неизвестной Z_j , равный реакции в i -й связи от единичного перемещения j -й связи ($Z_j = 1$). Свободные члены являются грузовыми коэффициентами, в частности, R_{iP} – реакция i -й связи в основной системе от нагрузки.

2.4. Построение единичных и грузовой эпюр моментов

Эпюры $M_1 \dots M_n$ от единичных значений перемещений $Z_1 \dots Z_n$ и грузовая эпюра, то есть эпюра моментов в основной системе от нагрузки $M_{p(q)}$, а также формулы реакций по концам элементов рамы сведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

NN сх.	Схемы балок и воздействий	Реакции и эпюры моментов	Формулы реакций
1			$M_A = (PL/2)v(1-v^2)$ $M_B = (PL/2)u^2v(3-u)$ $R_A = (Pv/2)(3-v^2)$ $R_B = (Pu^2/2)(3-u)$
2			$M_A = uv^2PL$ $M_B = vu^2PL$ $M_k = 2u^2v^2PL$ $R_A = v^2(1+2u)P$ $R_B = u^2(1+2v)P$
3			$M_A = qL^2/8$ $R_A = 5qL/8$ $R_B = 3qL/8$
4			$M_A = M_B = qL^2/12$ $R_A = R_B = qL/2$
5			$M_A = 3EJ/L$ $R_A = R_B = 3EJ/L^2$
6			$M_A = 4EJ/L$ $M_B = 2EJ/L$ $R_A = R_B = 6EJ/L^2$
7			$M_A = 3EJ/L^2$ $R_A = R_B = 3EJ/L^3$
8			$M_A = M_B = 6EJ/L^2$ $R_A = R_B = 12EJ/L^3$
9			$M_A = 3EJ\alpha\Delta t/h$ $\Delta t = t_1 - t_2$ $R_A = R_B = 3EJ\alpha\Delta t/2hL$
10			$M_A = M_B = EJ\alpha\Delta t/h$ h -высота поперечного сечения α -температурный коэффициент линейного расширения

Для статически неопределимых элементов рамы (однопролётных балок) они получены методом сил или интегрированием дифференциальных уравнений изгиба 4-го порядка.

2.5. Определение коэффициентов и грузовых членов уравнений

Коэффициенты и свободные члены системы уравнений определяем методом вырезания узлов. При этом моменты направляем от эпюры к стержню, а силы – в сторону возрастания момента, как показано в примере (см. ниже). Коэффициент r_{ij} определяется из условия равновесия узла с i -й дополнительной связью при единичном перемещении Z_j . Грузовой член R_{ip} определяем из условия равновесия узла с i -й дополнительной связью при действии нагрузки.

Перед решением системы канонических уравнений необходимо выполнить универсальные проверки:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} = \sum_{k=1}^m \int_0^{s_k} \frac{M_s M_s}{EI_k} dx;$$

$$\sum_{i=1}^n R_{iq} = \sum_{k=1}^m \int_0^{s_k} \frac{M_s M_q}{EI_k} dx$$

где M_s - суммарная эпюра, получается путем сложения ординат единичных эпюр ($M_1 \dots M_n$). Приведенные здесь интегралы вычисляются аналогично интегралам Мора в методе сил, то есть по правилу Верещагина.

2.6. Решение системы канонических уравнений

При автоматизированном (компьютерном) расчёте используем матричный алгоритм. Система канонических уравнений в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{R}_p = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{r}$ – матрица жесткости, $\mathbf{Z}$ – вектор неизвестных, $\mathbf{R}_p$ – вектор нагрузки, $\mathbf{0}$ – нуль-вектор. Отсюда определяется вектор неизвестных:

$$\mathbf{Z} = -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{R}_p,$$

где $\mathbf{r}^{-1}$ – обратная матрица жесткости. Здесь

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} R_{1p} \\ R_{2p} \\ \vdots \\ R_{np} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

При небольшом количестве уравнений для определения неизвестных можно использовать правило Крамера:

$$Z_j = |\mathbf{D}_j|/|\mathbf{D}|,$$

где $|\mathbf{D}|$ – определитель матрицы $\mathbf{r}$, $|\mathbf{D}_j|$ – определитель матрицы, полученной из $\mathbf{r}$ заменой j – го столбца столбцом грузовых членов $\mathbf{R}_{ip}$.

Проверка неизвестных проводится подстановкой в исходную систему.

2.7. Построение эпюры моментов

Зная эпюры моментов от единичных перемещений (M_j) и от заданной нагрузки (M_p), можем по принципу суперпозиции, с учетом линейности системы, представить моменты в крайних сечениях элементов рамы в виде суммы

$$M = \sum_{j=1}^n M_j Z_j + M_p$$

Пронумеровав крайние сечения для всех элементов рамы, подсчёт ординат эпюры удобно производить в табличной форме. Знаки моментов M_j и M_p здесь можно определять по предварительно принятому правилу, например, плюс – слева по ходу движения от меньшего к большему номеру сечения, в сторону возрастания абсциссы «х» локальной (отдельной для каждого элемента) системы координат (см. пример).

2.8. Построение эпюр поперечных и продольных сил

Эпюра Q строится по эпюре M по дифференциальной зависимости (см. ф. 1.14) или в конечных разностях (если эпюра моментов прямолинейна). Здесь x – абсцисса локальной (отдельной для каждого элемента) системы координат.

Из равновесия рамы в целом определим реакции, по которым с учётом нагрузки строим эпюру продольных сил N . Затем по эпюрам Q и N проверяем равновесие способом вырезания узлов. Суммарная проекция поперечных и продольных сил в узле на каждую из двух осей должна быть равна нулю.

2.9. Статическая и деформационная проверки

Необходимым условием правильности решения задачи является равенство нулю суммы проекций на оси декартовой системы координат всех активных и реактивных внешних сил. Реакции опор определяются непосредственно на эпюрах поперечной и продольной сил. Можно также проверять равновесие любой отсечённой части с учётом усилий в рассекаемых стержнях. Кроме этого, необходимо проверять равенство нулю суммы моментов в узлах, направляя момент от эпюры к оси стержня.

Предварительная деформационная проверка эпюры моментов не требует вычислений. Для этого нужно построить характер линии прогиба рамы, соответствующей связям и эпюре, зная, что выпуклость линии (растянутое волокно) со стороны момента, а кривизна пропорциональна моменту и что углы между касательными к элементам в рамных узлах неизменны.

2.10 Пример расчета рамы методом перемещений

Расчетная схема рамы показана на рис.2.2:

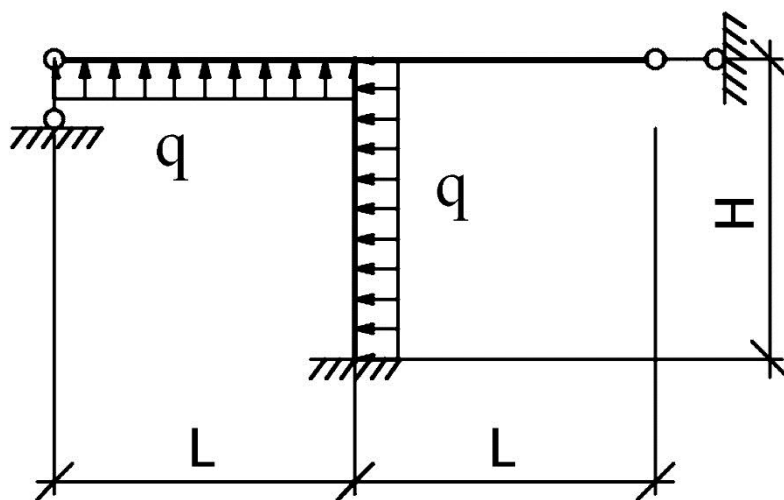


Рис. 2.2

Примем распределённую нагрузку на стойке и ригеле $q = 4 \text{ кН/м}$; Модуль упругости «Е» ($\text{кН}\cdot\text{м}^2$), моменты инерции ригеля I_p (м^4) и стойки I_c численно не задаём, поскольку на эпюры усилий влияет только соотношение изгибных жёсткостей элементов рамы. Примем $I_p/I_c = 2$, $I_c = I$, длины элементов L и H примем равными 6 м. В решении должны фигурировать все исходные данные в буквенном виде, числовые значения используем только в конечных результатах.

Основная система формируется установкой связи на поворот узла «В» (рис. 2.3), линейные перемещения узла исключены опорными связями.

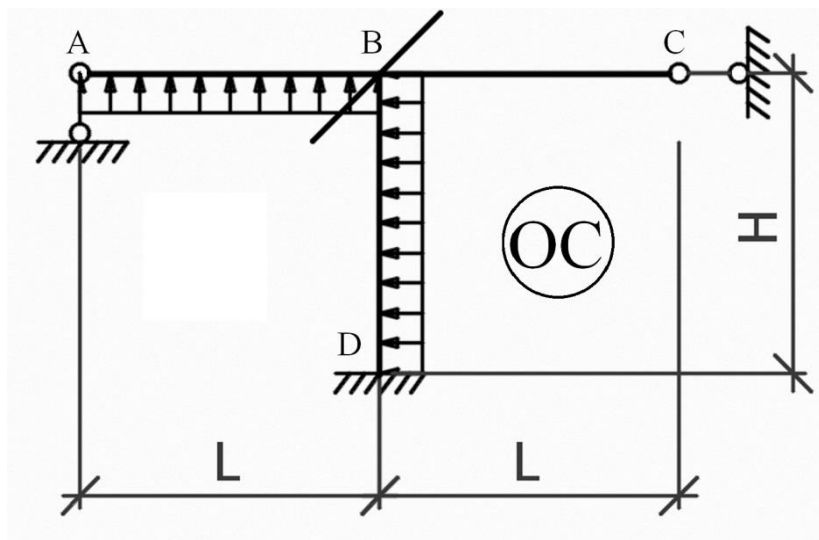


Рис. 2.3

Локальные оси и номера концевых сечений показаны на рис.1.9 (см. выше)
Далее (рис.2.4) показаны прогибы от поворота узла $Z_1=1$

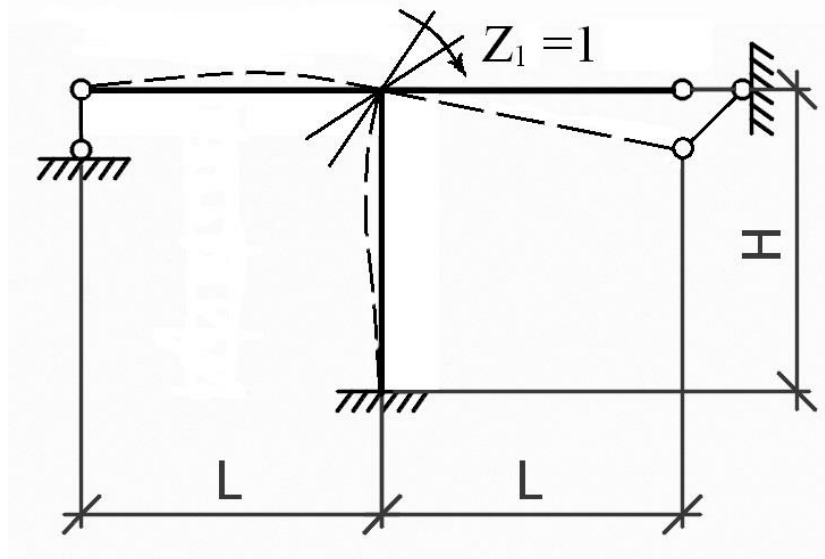


Рис. 2.4

Изгибающие моменты и реакции от единичного поворота Z_1 показаны на рис. 2.5. Они находятся по соответствующим схемам табл. 2.1. Там же находим эпюры (рис. 2.6) и формулы реакций от нагрузки q .

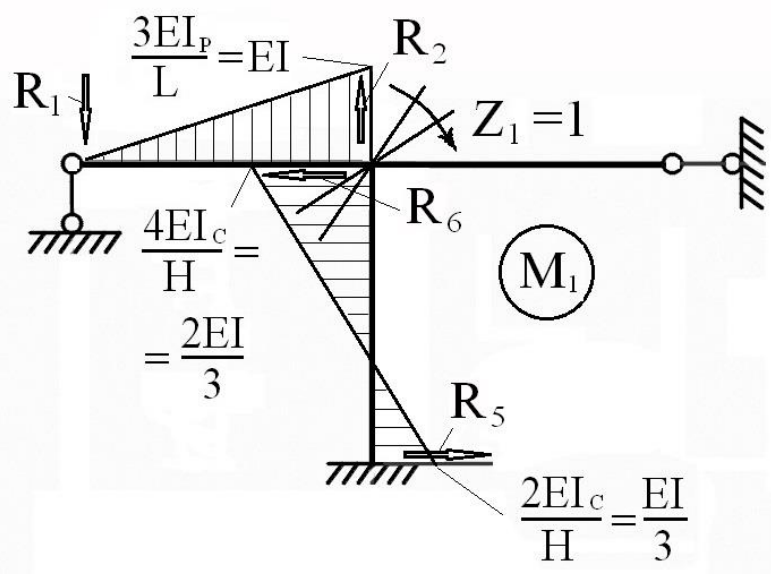


Рис. 2.5

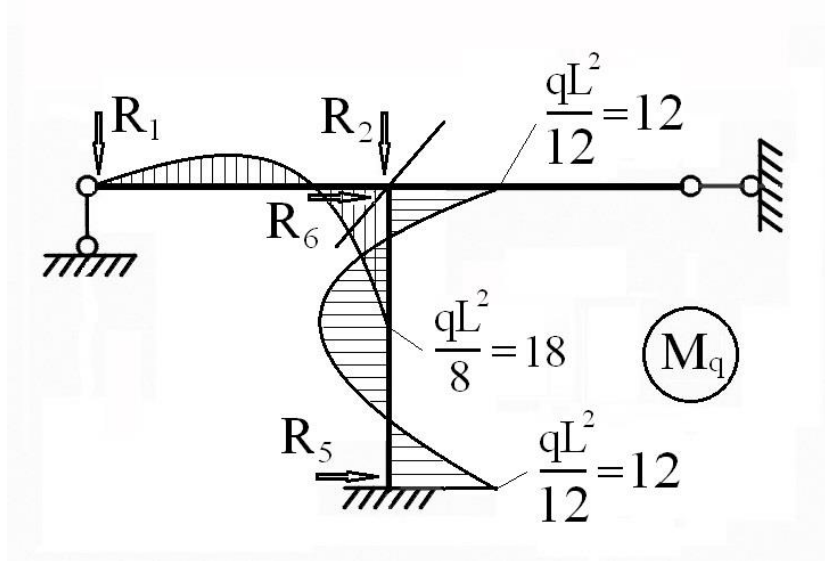


Рис. 2.6

Уравнение метода для данного примера имеет вид:

$$r_{11}Z_1 + R_{1q} = 0. \quad (2.1)$$

Из равновесия узла «В» находим:

$$EI \quad \text{B} \quad r_{11} = EI + 2EI/3 = 5EI/3$$

$$2EI/3$$

Рис. 2.7

$$18 \quad \text{B} \quad R_{1q} = 18 + 12 = 30$$

$$12$$

Рис. 2.8

Из уравнения (2.1) имеем

$$Z_1 = 30/(5EI/3) = 18/EI$$

Изгибающие моменты в концевых сечениях находим по формуле

$$M = M_1 Z_1 + M_q \text{ (таб. 2.3).}$$

Таблица 2.3

№ сечения	$M_1 Z_1$	M_{1q}	$M \text{ (кН}\cdot\text{м)}$
1	0	0	0
2	18	-18	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	-6	-12	-18
6	12	-12	0

Следующие действия аналогичны тем, которые выполняются при расчёте методом сил (см. пример п.1.10). Суммарные эпюры складываются из линейных, определяемых по таблице, и параболических, обусловленных распределённой нагрузкой.

. Окончательные эпюры M и Q имеют такой же вид, как и в методе сил (см. рис. 1.10-1.11). Из равновесия рамы в целом определим реакции (рис. 1.12) и продольные силы (рис. 1.13). Равновесие узла «В» (рис. 1.14) проверяем по алгебраическим суммам проекций на оси:

$$\sum X = N_{3-4} - Q_{5-6} = 9 - 9 = 0; \quad \sum Y = Q_{1-2} - N_{5-6} = 12 - 12 = 0.$$

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Для всех вариантов заданий исходные числовые значения принимаются по приведённому примеру. Использовать их следует только в конечных результатах. Буквенные обозначения также следует принять из примера. Расчётные схемы для индивидуальных заданий даны в таблице 2.4:

Таблица 2.4

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32

4. ЛИТЕРАТУРА

1. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 2. Статически неопределимые системы: Уч. пос. – М.: АСВ, 2000. – 464 с.
2. Бабанов В. В. Теоретическая механика для архитекторов. В 2 томах. М., «Академия», 2011г.
3. Саргсян А.Е., Дворянчиков Н.В., Джинчвелашвили Г.А. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов. – М.: АСВ, 1998. – 320 с.
4. Шипков О. И. Расчёт статически неопределимой рамы методом сил. Методические указания, пример расчёта и контрольные задания к расчётно-графической работе, по дисциплине «Строительная механика». – М.: 2016. – 18с.

